Esempio 1 : Sia $(v_1, \ldots, v_n)$ una base di E. Si scelga come insieme E^+ l'insieme di tutti i vettori $v = \sum \lambda_i v_i$ in cui la prima coordinata non nulla λ_i sia positiva.

Osservazione. Un ordinamento E^+ definisce su E una *relazione d'ordine totale* , non appena si ponga $v_1 \geq v_2$ se e solo se $v_1 - v_2 \in E^+$ oppure $v_1 = v_2$. Tale relazione è compatibile con la somma e con il prodotto esterno per scalari positivi. Inversamente, ogni relazione d'ordine totale su E, che sia compatibile con la somma e con il prodotto per scalari positivi, definisce un *ordinamento* su E , quando si ponga $E^+ = \{ v \in E \mid v > 0 \}$

Definizione 2. *Un sottoinsieme Φ^+ di Φ si dice* **sistema positivo** *se $\Phi^+ = \Phi \cap E^+$, per qualche ordinamento di E .*

Definizione 3. *Un sottoinsieme Π di Φ si dice* **sistema fondamentale** *se :*

i) Π è linearmente indipendente

ii) ogni radice di Φ si può esprimere come combinazione lineare di radici appartenenti a Π , con coefficienti o tutti non-negativi o tutti non-positivi.

(Dunque, in particolare, un sistema fondamentale è una base di E, contenuta in Φ.)

Notazione . Se Φ^+ è un sistema positivo contenuto in Φ, denotiamo con Φ^- l'insieme $-\Phi^+$ delle radici 'negative' , cioè opposte delle radici appartenenti a Φ^+ . Ovviamente , in forza del punto iii) della Def. 1 , $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.

Lemma 1 . *Se Π è un sistema fondamentale contenuto in Φ , vi è un unico sistema positivo Φ^+ che contiene Π.*

Dim. Sia E^+ l'ordinamento di E considerato nell'Esempio 1. , avendo assunto $\Pi = (v_1, \ldots, v_n)$. Evidentemente, $\Pi \subset E^+$, e quindi $\Pi \subset \Phi^+ = \Phi \cap E^+$. D'altra parte, se Π è contenuto in un sistema positivo Φ^+, relativo a un certo ordinamento di E, Φ^+ è univocamente determinato da Π . Infatti Φ^+ non può che consistere delle radici $\alpha = \sum \lambda_i \pi_i$, $\pi_i \in \Pi$, con $\lambda_i \geq 0$.

Teorema 1 (esistenza di sistemi fondamentali) . *Ogni sistema positivo Φ^+ contiene un sistema fondamentale .*

Dim. Sia Φ^+ un sistema positivo contenuto in Φ; sia Π un sottoinsieme di Φ^+, tale che ogni radice di Φ^+ sia combinazione lineare di radici di Π con coefficienti non-negativi; e sia Π minimale rispetto a tale proprietà. (Un siffatto Π certamente esiste, poichè lo stesso Φ^+ soddisfa la prima condizione.) Per provare che Π è un sistema fondamentale, basterà provare che Π è linearmente indipendente. A tale scopo, otteniamo dapprima un risultato di per sè interessante ; mostriamo cioè che :

(*) per ogni coppia di radici distinte α , β appartenenti a Π è $(\alpha , \beta) \leq 0$.

Supponiamo che sia $(\alpha , \beta) > 0$. Allora $r_\alpha(\beta) = \beta - c\alpha$, con $c > 0$. Se $r_\alpha(\beta)$ appartenesse a Φ^+ , sarebbe $r_\alpha(\beta) = \Sigma \lambda_i\pi_i$, $\pi_i \in \Pi$, con $\lambda_i \geq 0$, cioè $\beta = c\alpha + \Sigma \lambda_i\pi_i$, e il coefficiente di β nel secondo membro dovrebbe essere minore di 1 (altrimenti sarebbe $0 = c\alpha + \Sigma \lambda_i\pi_i - \beta \in E^+$, il che è impossibile) . Ma allora β sarebbe combinazione lineare con coefficienti non-negativi delle restanti radici di Π , contro la scelta minimale di Π . Se invece $r_\alpha(\beta)$ appartenesse a Φ^- , sarebbe $-r_\alpha(\beta) = \Sigma \lambda_i\pi_i$, $\pi_i \in \Pi$, con $\lambda_i \geq 0$, cioè $c\alpha = \beta + \Sigma \lambda_i\pi_i$, e il coefficiente di α nel secondo membro dovrebbe essere minore di c . Pertanto α sarebbe combinazione lineare con coefficienti non-negativi delle restanti radici di Π , ancora contro la scelta minimale di Π .

Consideriamo ora una relazione lineare fra gli elementi di Π . Essa si potrà scrivere nella forma : $\Sigma c_i\alpha_i = \Sigma d_i\beta_i = \rho$, con $c_i \geq 0$, $d_i \geq 0$, e α_i , β_i elementi a due a due distinti di Π . Allora è $0 \leq (\rho , \rho) = \Sigma_{i,j} (\alpha_i , \beta_j)\, c_i\, d_j \leq 0$ (in forza di (*)) . Ciò implica $\rho = 0$, cioè , essendo α_i , $\beta_i \in E^+$, $c_i = d_i = 0$, per ogni i.

Teorema 2 . *Ogni sistema positivo contiene un solo sistema fondamentale .*

Dim. Supponiamo che il sistema positivo Φ^+ contenga due sistemi fondamentali $\Pi = \{\alpha_1 , \ldots , \alpha_n\}$, $\Pi' = \{\beta_1 , \ldots , \beta_n\}$. Allora : $\alpha_i = \Sigma_j c_{ij} \beta_j$, $\beta_i = \Sigma_j d_{ij} \alpha_j$, con $c_{ij} \geq 0$, $d_{ij} \geq 0$, e (c_{ij}) , (d_{ij}) matrici una inversa dell'altra . Pertanto, per ogni $k \neq i$, è $\Sigma_m c_{im} d_{mk} = 0$. D'altra parte, per ciascun i esiste un j tale che $c_{ij} \neq 0$. Ne segue , per ogni $k \neq i$, $d_{jk} = 0$, e quindi $d_{ji} \neq 0$. Ciò a sua volta implica per ogni $k \neq j$, essendo $\Sigma_r d_{jr} c_{rk} = 0$, $c_{ik} = 0$. Dunque ogni riga di (c_{ij}) contiene un solo elemento non nullo, ovvero, essendo (c_{ij}) non-singolare, (c_{ij}) è una matrice monomiale. A meno di un riordinamento degli elementi di Π' , si può quindi supporre che (c_{ij}) sia diagonale , così che per ogni $i = 1 , \ldots , n$ si ha $\alpha_i = c_{ii}\beta_i$, con $c_{ii} > 0$. Segue $c_{ii} = 1$, ovvero $\alpha_i = \beta_i$.

Corollario 1. *La corrispondenza che associa ad ogni sistema fondamentale il sistema positivo che lo contiene realizza una bijezione fra l'insieme dei sistemi fondamentali e l'insieme dei sistemi positivi .*

Dim. Lemma 1 , e Teoremi 1 e 2 .

Vogliamo ora dare, del teorema di unicità precedente (Teorema 2) , una dimostrazione alternativa , che fornisce ad un tempo una caratterizzazione intrinseca del sistema fondamentale Π contenuto in un assegnato sistema positivo Φ^+ :

Teorema 3 . *Π è il sottoinsieme di Φ^+ che consiste delle radici "indecomponibili" , cioè delle radici che non si possono esprimere come somma di due radici di Φ^+.*

Dim. Sia $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$, e si supponga, ad es. , $\pi_1 = \alpha + \beta$, $\alpha = \Sigma c_i\pi_i$, $\beta = \Sigma d_i\pi_i$ appartenenti a Φ^+ . Allora $\pi_1 = \Sigma c_i\pi_i + \Sigma d_i\pi_i$, e poichè Π è linearmente indipendente, segue $c_i + d_i = 0$, cioè $c_i = d_i = 0$, per $i > 1$, e $c_1 + d_1 = 1$. D'altronde è anche $\alpha = c_1\pi_1$, $\beta = d_1\pi_1$, da cui $c_1 = d_1 = 1$., contro quanto appena ottenuto .
Si supponga ora $\alpha \in \Phi^+ - \Pi$. Allora $\alpha = \Sigma c_i\pi_i$, con $c_i \geq 0$, e da $0 < (\alpha, \alpha) = (\alpha, \Sigma c_i\pi_i) = \Sigma c_i(\alpha, \pi_i)$ segue che , per qualche i , (α, π_i) è maggiore di zero. Poichè $\alpha \notin \Pi$, α e π_i sono indipendenti, e pertanto, in forza di 3. Lemma 1 , $\alpha - \pi_i$ è una radice (ovviamente positiva , poichè almeno uno , e quindi tutti i coefficienti nell'espressione $\alpha - \pi_i = \Sigma c_i\pi_i - \pi_i$ sono positivi) .Si conclude che $\alpha = \pi_i + (\alpha - \pi_i)$ è "decomponibile" .

Scegliamo ora un sistema fondamentale Π , e denotiamo con Φ^+ il sistema positivo che contiene Π , ritenendoli fissati una volta per tutti negli enunciati che seguiranno .

Osserviamo innanzitutto che i Teoremi 2 e 3 , e le loro dimostrazioni , contengono risultati e implicano conseguenze notevoli , che conviene enunciare in Corollari indipendenti :

Corollario 2 .
i) per ogni coppia di radici distinte α, β appartenenti a Π è $(\alpha, \beta) \leq 0$.
ii) per ogni $\alpha \in \Phi^+ - \Pi$, esiste $\pi_i \in \Pi$ tale che sia $(\alpha, \pi_i) > 0$, e quindi $\alpha - \pi_i \in \Phi^+$.

Dim. i) : Si è provato l'asserto per il sistema fondamentale considerato nella dimostrazione del Teorema 1, e dunque per ogni sistema fondamentale.
ii) : Cfr. la dimostrazione del Teorema 2 .

Corollario 3 . *Ogni radice $\alpha \in \Phi^+$ si può esprimere nella forma $\alpha = \pi_1 + \ldots + \pi_t$ ($\pi_i \in \Pi$, non necessariamente distinte) , in modo tale che , per ogni $s \leq t$, la somma parziale $\pi_1 + \ldots + \pi_s$ sia una radice .*
In particolare dunque , ogni radice è combinazione lineare delle radici fondamentali con coefficienti ***interi*** *.*

Dim. Per ogni $\alpha = \Sigma c_i\pi_i \in \Phi$ $(\pi_i \in \Pi)$ definiamo l'*altezza* $ht(\alpha)$ ponendo

$$ht(\alpha) = \Sigma c_i .$$

Notiamo che , per il Corollario 2 , pto ii) , per ogni $\alpha \in \Phi^+ - \Pi$, esiste $\pi \in \Pi$ tale che $\alpha - \pi \in \Phi^+$. Se ne deduce che , essendo $ht(\alpha - \pi) = ht(\alpha) - 1$, le radici positive di altezza minimale sono le radici fondamentali (che hanno altezza 1) , e che per ogni $\alpha \in \Phi^+$ $ht(\alpha)$ è un intero . Possiamo allora

procedere per induzione su $ht(\alpha)$. L'asserto è ovvio se $ht(\alpha) = 1$, i.e. se $\alpha \in \Pi$. Se invece $\alpha \in \Phi^+ - \Pi$, e $\alpha - \pi \in \Phi^+$ $(\pi \in \Pi)$, così che $\alpha = \pi + (\alpha - \pi)$ e alla radice $\alpha - \pi$ si può applicare l'ipotesi induttiva , si ottiene $\alpha - \pi = \pi_1 + \ldots + \pi_{t-1}$ $(\pi_i \in \Pi, 1 \leq i \leq t-1)$, e $\pi_1 + \ldots + \pi_{s-1} \in \Phi$ per ogni $s < t$. Posto $\pi = \pi_t$, si ottiene l'asserto per α .

Corollario 4 . *Rispetto alla base Π , ogni elemento del gruppo di Weyl W è rappresentato da una matrice a elementi interi* .

Dim. Basta osservare che , per ogni $w \in W$ e per ogni $\pi_i \in \Pi$, $w(\pi_i)$ è una combinazione lineare intera di Π .

Teorema 4 .

i) Ogni radice è immagine di qualche radice fondamentale , per l'azione del gruppo di Weyl W .
ii) W è generato dalle 'riflessioni fondamentali' r_α $(\alpha \in \Pi)$.

Dim.

i) Poniamo $W_0 = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle$. Mostriamo che ogni $\rho \in \Phi$ ha la forma $w(\alpha)$ per qualche $w \in W_0$, $\alpha \in \Pi$. Supponiamo che $\rho \in \Phi^+$ e procediamo per induzione su $ht(\rho)$. L'asserto è banalmente vero se $ht(\rho) = 1$. Se $ht(\rho) > 1$, sappiamo (Corollario 2 , pto ii)) che esiste $\pi \in \Pi$ tale che sia $(\rho , \pi) > 0$, e quindi , essendo $r_\pi(\rho) = \rho - 2((\rho , \pi)/(\pi , \pi))\, \pi$, $ht(r_\pi(\rho)) < ht(\rho)$. Allora per induzione $r_\pi(\rho) = w'(\alpha)$ per qualche $w' \in W_0$, $\alpha \in \Pi$. Da ciò segue che $\rho = r_\pi(w'(\alpha)) = (r_\pi w')(\alpha)$, con $r_\pi w' \in W_0$. Se poi $\rho \in \Phi^-$, si ha $\rho = -(-\rho) = -w(\alpha) = w(-\alpha) = w(r_\alpha(\alpha)) = (wr_\alpha)(\alpha)$, con $w \in W_0$, $\alpha \in \Pi$.

ii) Proviamo che $W_0 = W$, mostrando che $r_\rho \in W_0$ per ogni $\rho \in \Phi$. In forza di i) , $\rho = w(\alpha)$ per qualche $w \in W_0$, $\alpha \in \Pi$. Ma allora $r_\rho = r_{w(\alpha)} = wr_\alpha w^{-1} \in W_0$, q.e.d. .

5. La funzione lunghezza nel gruppo di Weyl W.

Per il Teorema 4 del paragrafo precedente , il gruppo di Weyl W è generato dalle riflessioni fondamentali. In altre parole, ogni $w \in W$ è prodotto di riflessioni fondamentali:

$$w = r_1 \cdots r_k \qquad (*)$$

ove $r_i = r_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \Pi$.

Definizione 1. *La lunghezza minima di un'espressione di $w \in W$ della forma (*) si dirà* **lunghezza** *di w, e si denoterà con $l(w)$.*

Definizione 2. *Per ogni $w \in W$, poniamo :*
$$N(w) = \{\alpha \mid \alpha \in \Phi^+, w(\alpha) \in \Phi^-\} = \Phi^+ \cap w^{-1}(\Phi^-), \text{ e } n(w) = |N(w)|.$$

(Dunque $n(w)$ è il numero delle radici positive che sono trasformate da w in radici negative.)

Osservazione 1. Notiamo che, per ogni $w \in W$, è $n(w) = n(w^{-1})$. Si ha infatti: $|\Phi^+ \cap w^{-1}(\Phi^-)| = |w(\Phi^+) \cap \Phi^-| = |-\Phi^+ \cap w(\Phi^+)| = |\Phi^+ \cap (w^{-1})^{-1}(\Phi^-)|$.

Proviamo innanzitutto che $n(r_\alpha) = 1$ se $\alpha \in \Pi$:

Lemma 1. *Sia $\alpha \in \Pi$. Allora $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$, e $r_\alpha(\beta) \in \Phi^+$ per ogni $\beta \in \Phi^+ -\{\alpha\}$.*

Dim. Sia $\beta \in \Phi^+ -\{\alpha\}$. Allora $\beta = \sum c_i \alpha_i$, con $c_i \geq 0$, e $c_j > 0$ per qualche j tale che $\alpha_j \neq \alpha$. Pertanto il coefficiente di α_j in $r_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ è positivo, e quindi $r_\alpha(\beta) \in \Phi^+$.

Lemma 2. *Sia $\alpha \in \Pi$, e $w \in W$. Allora si ha :*

(i) Se $w^{-1}(\alpha) \in \Phi^+$, $n(r_\alpha w) = n(w) + 1$

(ii) Se $w^{-1}(\alpha) \in \Phi^-$, $n(r_\alpha w) = n(w) - 1$

(iii) Se $w(\alpha) \in \Phi^+$, $n(w r_\alpha) = n(w) + 1$

(iv) Se $w(\alpha) \in \Phi^-$, $n(w r_\alpha) = n(w) - 1$

Dim.

(i) Supponiamo $w^{-1}(\alpha) \in \Phi^+$. Sia $\beta \in N(w)$, cioè $\beta \in \Phi^+$ e $w(\beta) \in \Phi^-$. Segue $w(\beta) \neq -\alpha$, altrimenti $\beta = -w^{-1}(\alpha) \in \Phi^-$, per l'ipotesi. Per il Lemma 1 si conclude che $(r_\alpha w)(\beta) = r_\alpha(w(\beta)) \in \Phi^-$. Pertanto $N(r_\alpha w) \supseteq N(w)$. E poichè chiaramente $w^{-1}(\alpha) \notin N(w)$, e $(r_\alpha w)(w^{-1}(\alpha)) = -\alpha \in \Phi^-$, $N(r_\alpha w) \supset N(w)$. D'altra parte, sia $\beta \in N(r_\alpha w) - N(w)$. Allora $r_\alpha(w(\beta)) \in \Phi^-$, ma $w(\beta) \in \Phi^+$, da cui necessariamente $w(\beta) = \alpha$, ovvero $\beta = w^{-1}(\alpha)$. Si conclude $n(r_\alpha w) = n(w) + 1$.

(ii) Se $w^{-1}(\alpha) \in \Phi^-$, $-w^{-1}(\alpha) = w^{-1}(-\alpha) = w^{-1}(r_\alpha(\alpha)) \in \Phi^+$. In altre parole, $(r_\alpha w)^{-1}(\alpha) \in \Phi^+$, e quindi in forza di (i) $n(r_\alpha r_\alpha w) = n(w) = n(r_\alpha w) + 1$, ovvero $n(r_\alpha w) = n(w) - 1$.

(iii) Si applichi (i) rimpiazzando w con w^{-1}, e si tenga quindi conto dell' Osservazione 1.

(iv) Si applichi (ii) rimpiazzando w con w^{-1}, e si tenga quindi conto dell' Osservazione 1.

Possiamo ora provare il seguente :

Teorema 1. *Per ogni $w \in W$, si ha $l(w) = n(w)$ (cioè la lunghezza di w è uguale al numero di radici positive che w trasforma in radici negative) .*

Dim. Sia $w = r_1 \cdots r_k$, ove $r_i = r_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \Pi$, e $l(w) = k$. In forza del Lemma 2, si ha certamente $n(w) \leq n(r_1 w) + 1 \leq n(r_2 r_1 w) + 2 \leq \cdots \leq k$, e pertanto $n(w) \leq l(w)$.
Per assurdo, supponiamo $n(w) < k$. Allora, in forza del Lemma 2, punto (iii), esiste un $j < k$ tale che $r_1 \cdots r_j(\alpha_{j+1}) \in \Phi^-$; e quindi anche un $i < j$ tale che sia $r_{i+1} \cdots r_j(\alpha_{j+1}) \in \Phi^+$, ma $r_i r_{i+1} \cdots r_j(\alpha_{j+1}) \in \Phi^-$. Poichè l'unica radice positiva alla quale r_i cambi segno è α_i, ne segue che $r_{i+1} \cdots r_j(\alpha_{j+1}) = \alpha_i$. Se ne deduce che $(r_{i+1} \cdots r_j) r_{j+1} (r_{i+1} \cdots r_j)^{-1} = r_i$, ovvero $r_{i+1} \cdots r_{j+1} = r_i \cdots r_j$. Possiamo dunque riscrivere $w = r_1 \cdots r_k = r_1 \cdots r_i r_i \cdots r_j r_{j+2} \cdots r_k = r_1 \cdots r_{i-1} r_{i+1} \cdots r_j r_{j+2} \cdots r_k$, e l'ultima è un'espressione di w come prodotto di k-2 riflessioni fondamentali. Segue $l(w) < k$, assurdo.
Si conclude $l(w) = n(w)$.

Corollario 1. *L'unico elemento del gruppo di Weyl W che fissi un sistema fondamentale è l'identità.*

Dim. Sia Π un sistema fondamentale in Φ, contenuto nel sistema positivo Φ^+. Se $w \in W$, e $w(\Pi) = \Pi$, è anche $w(\Phi^+) = \Phi^+$, e quindi $n(w) = l(w) = 0$, cioè $w = 1$.

Osserviamo esplicitamente che, in forza della definizione stessa di sistema fondamentale, l'immagine $w(\Pi)$ di un sistema fondamentale Π mediante un elemento w del gruppo di Weyl è ancora un sistema fondamentale. Dunque W opera come un gruppo di permutazioni sulla collezione Ω dei sistemi fondamentali contenuti in Φ, e certamente opera su Ω in modo fedele, stante il Corollario 1. In effetti, è facile vedere che:

Teorema 2. *Il gruppo di Weyl W opera come un gruppo regolare sull'insieme dei sistemi fondamentali contenuti in Φ (i.e. per ogni coppia di sistemi fondamentali Π_1, Π_2 vi è uno e un solo elemento di W che porta Π_1 in Π_2).*

Dim. Siano Π_1, Π_2 due sistemi fondamentali. Proviamo innanzitutto che esiste almeno un $w \in W$ tale che $w(\Pi_1) = \Pi_2$. Procediamo per induzione su $n = |\Phi_1^+ \cap \Phi_2^-|$, ove Φ_1^+ e Φ_2^+ sono i sistemi positivi che contengono Π_1 e Π_2 rispettivamente . Se $n = 0$, cioè $\Phi_1^+ = \Phi_2^+$, si ha $\Pi_1 = \Pi_2$, e l'asserto è ovvio. Sia dunque $n > 0$. Allora $\Pi_1 \cap \Phi_2^- \neq \varnothing$, altrimenti ogni radice in Φ_1^+ apparterrebbe a Φ_2^+. Se $\alpha \in \Pi_1 \cap \Phi_2^-$, $r_\alpha(\Phi_1^+)$ differisce da Φ_1^+ solo per il fatto che α è sostituita da $-\alpha$: dunque $|r_\alpha(\Phi_1^+) \cap \Phi_2^-| = n - 1$. Poichè $r_\alpha(\Pi_1)$ è il sistema fondamentale contenuto nel sistema positivo $r_\alpha(\Phi_1^+)$, per induzione si ha $w' r_\alpha(\Pi_1) = \Pi_2$ per qualche $w' \in W$. Si conclude che $w(\Pi_1) = \Pi_2$, con $w = w' r_\alpha \in W$. L'unicità di w segue immediatamente dal Corollario 1 : se $w_1(\Pi_1) = w_2(\Pi_1) = \Pi_2$, allora $w_2^{-1} w_1(\Pi_1) = \Pi_1$, cioè $w_2^{-1} w_1 = 1$, ovvero $w_1 = w_2$.

In particolare :

Corollario 2 . *L'ordine del gruppo di Weyl $W = W(\Phi)$ è uguale al numero dei sistemi fondamentali contenuti in Φ (ovvero al numero dei sistemi positivi Φ^+) .*

6. La geometria del gruppo di Weyl W : sistemi fondamentali e camere di Weyl.

Siano come al solito assegnati E , Φ , e per ogni $\alpha \in \Phi$ sia H_α l'asse della riflessione r_α , i.e. l'iperpiano ortogonale al vettore α : $H_\alpha = \{x \in E \mid (x , \alpha) = 0\}$.

L'insieme $E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$ è un aperto non-vuoto (rispetto alla topologia usuale di E). Le sue componenti connesse sono le cosiddette **camere di Weyl** (di E, relative al sistema Φ).

(E' chiaro che due vettori $u,v \in E$ stanno in una stessa camera di Weyl sse stanno nello stesso semispazio aperto rispetto a ogni iperpiano H_α ($\alpha \in \Phi$), cioè sse, per ogni $\alpha \in \Phi$, gli scalari (u , α) e (v , α) sono entrambi positivi o entrambi negativi.)

Se C è una qualsiasi camera di Weyl, e si denota con δC la sua frontiera, diremo che l'iperpiano H_α è una **parete** di C se $H_\alpha \cap \delta C$ non è contenuto in alcun sottospazio proprio di H_α .

I sistemi fondamentali contenuti in Φ, e l'azione del gruppo W sui sistemi fondamentali, hanno una naturale e suggestiva interpretazione geometrica in termini di camere di Weyl.

Innanzitutto, ogni sistema fondamentale dà origine a una camera di Weyl. Precisamente :

Sia $\Pi = \{\alpha_1 , . . . , \alpha_n\}$ un sistema fondamentale in Φ, e si consideri l'insieme $C = \{ x \in E \mid (x , \alpha_i) > 0, \forall\, i = 1, . . . , n\}$. Chiaramente, *C è una camera di Weyl* (dal momento che la condizione $(x , \alpha_i) > 0$ si estende a $(x , \alpha) > 0$ per ogni $\alpha \in \Phi^+$). Inoltre, *le pareti di C sono precisamente gli iperpiani H_α , $\alpha \in \Pi$.*

(Per rendersene conto , si osservi che , per ogni $\alpha_i \in \Pi$, si ha $S = H_{\alpha_i} \cap \delta C = \{ x \in E \mid (x , \alpha_i) = 0 , (x , \alpha_j) \geq 0, \forall\, j \neq i\}$. Se S fosse contenuto in un sottospazio proprio di H_{α_i} , gli elementi di S dovrebbero soddisfare una relazione lineare $(x, u) = 0$, con $0 \neq u = \sum c_k \alpha_k$, indipendente da α_i . Sia $k \neq i$ tale che $c_k \neq 0$, e si consideri il complemento ortogonale in E di $\Pi - \{\alpha_k\}$. Tale complemento deve contenere certamente un elemento non-nullo di S ,

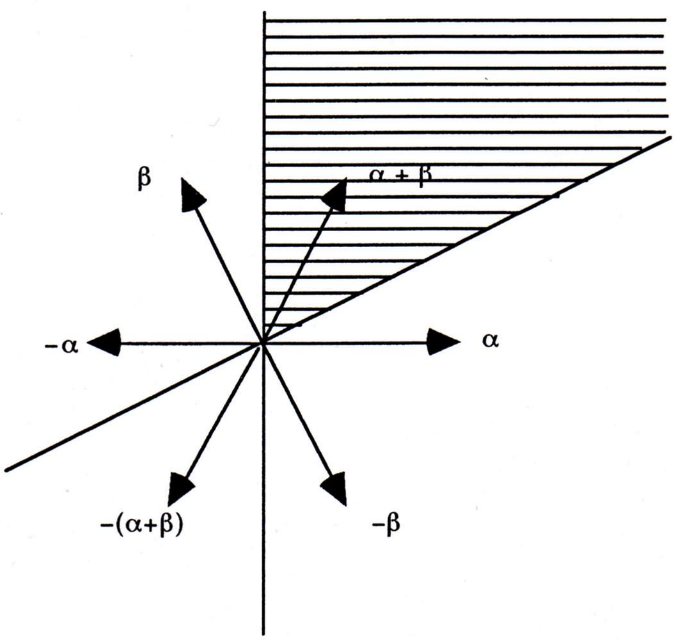
contraddizione, poichè un tale elemento non soddisfa l'equazione $(x, u) = 0$. Dunque gli iperpiani H_α, con $\alpha \in \Pi$, sono pareti di C.
Inversamente, se $\alpha \in \Phi^+ - \Pi$, $\alpha = \Sigma\, c_i\, \alpha_i$ con *almeno due* $c_i > 0$. Se $x \in H_\alpha \cap \delta C$, $\Sigma\, c_i\, (x, \alpha_i) = 0$, ciò che implica $(x, \alpha_i) = 0$ per tutti gli i tali che $c_i > 0$. Dunque $H_\alpha \cap \delta C$ è contenuto in un sottospazio proprio di H_α.)

Definizione 1. *Diremo che* $C = \{x \in E \mid (x, \alpha_i) > 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n\}$ *è la* **camera fondamentale** *(associata a* Π*).*

(Le radici fondamentali α_i sono precisamente le radici ortogonali alle pareti di C, e "orientate verso C" (nel senso che, per ogni i, α_i giace nello stesso semispazio, rispetto a $H_{\alpha i}$, in cui giace C).)

Esempio :

Nel caso in cui Φ sia il sistema di radici di tipo A_2, considerato in 3., con $\Pi = \{\alpha, \beta\}$, la camera di Weyl fondamentale è la regione tratteggiata in figura :



Vediamo ora come, inversamente, ogni camera di Weyl C' dia luogo a un sistema fondamentale (la cui camera fondamentale è C'). A tale scopo proviamo che:

Proposizione 1. *W opera come un gruppo transitivo sulle camere di Weyl.*

Dim. Poichè W è un gruppo di isometrie che preserva Φ, per ogni $\alpha \in \Phi$ e per ogni $w \in W$ $w(H_\alpha) = H_{w\alpha}$, cioè w permuta gli iperpiani H_α $(\alpha \in \Phi)$.

Segue immediatamente che, se C è una camera di Weyl, anche w(C) è una camera di Weyl, e dunque W opera sull'insieme delle camere. Siano ora $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ un assegnato sistema fondamentale, C la sua camera fondamentale, e C' una qualsiasi camera di Weyl. Sia $v \in C'$, e sia Γ l'orbita di W su E contenente v. Poichè W è finito, $|\Gamma| < \infty$, e possiamo perciò scegliere in Γ l'elemento v', massimo rispetto alla relazione d'ordine $>$ definita dall'ordinamento E^+ per il quale $E^+ \cap \Phi = \Phi^+ \supset \Pi$. Si ha allora, per ogni $\alpha \in \Pi$, $r_\alpha(v') = v' - \langle v', \alpha \rangle \alpha \leq v'$, da cui $\langle v', \alpha \rangle \geq 0$, ovvero $v' \in \overline{C}$ (la chiusura di C). Sia ora $v' = w(v)$. Allora $v' \in w(C')$. D'altra parte, l'unica camera che interseca $\overline{C}$ è ovviamente C. Segue w(C') = C, e l'azione di W sulle camere è transitiva.

Segue dalla Proposizione precedente il

Corollario 1. *Se C' è una camera di Weyl, le radici ortogonali alle pareti di C', e orientate verso C', formano un sistema fondamentale, la cui camera fondamentale è C'.*

Dim. Con le notazioni della Proposizione 1. , sia C la camera fondamentale associata al sistema fondamentale Π. Per quanto visto, esiste $w \in W$ tale che w(C') = C, ovvero $C' = w^{-1}(C)$. Le radici ortogonali alle pareti di C' e orientate verso C' sono evidentemente gli elementi di $w^{-1}(\Pi)$, e questi formano (cfr. 5. Teorema 2) un sistema fondamentale (la cui camera fondamentale è C').

La bijezione che si è così stabilita fra camere di Weyl e sistemi fondamentali mette in luce che le azioni del gruppo di Weyl W sull'insieme delle camere e sull'insieme dei sistemi fondamentali sono equivalenti. In particolare :

W opera come un gruppo regolare sull'insieme delle camere di Weyl. (In particolare : l'ordine di W è uguale al numero delle camere di Weyl.)

Osservazione : Con la Proposizione 1 abbiamo mostrato che, se C è la camera fondamentale associata al sistema fondamentale Π, per ogni camera di Weyl C' esiste $w \in W$ tale che w(C') = C, e quindi $w(\overline{C'}) = \overline{C}$. Ciò implica in particolare che, per ogni $v \in E$ esiste un elemento dell'orbita di W su E contenente v, che sta nella chiusura $\overline{C}$ della camera C. Di fatto :

Corollario 2. *Per ogni camera di Weyl C , la chiusura $\overline{C}$ è un* **dominio fondamentale** *per l'azione del gruppo di Weyl sullo spazio E (cioè : per ogni W-orbita Γ su E, $|\Gamma \cap \overline{C}| = 1$).*

Dim. Si tratta di provare che, se $v_1 = w_1(v)$ e $v_2 = w_2(v)$ appartengono entrambi a $\overline{C}$, allora $v_1 = v_2$; ovvero, equivalentemente, che se $w(v_1) = v_2$, con $w \in W$, e $v_1, v_2 \in \overline{C}$, allora $v_1 = v_2$. Procediamo per induzione su $l(w)$, essendo l'asserto banalmente vero per $l(w) = 0$. Se $l(w) > 0$, possiamo scrivere $w = r_\alpha w'$, e $w' = r_\alpha w$, con $l(w') = l(w) - 1$, e α appartenente al sistema fondamentale Π associato a C. Ma allora (cfr. 5. , Lemma 2 , ii)) deve essere $w^{-1}(\alpha) \in \Phi^-$. Ne segue che $0 \leq (v_2, \alpha) = (w(v_1), \alpha) = (v_1, w^{-1}(\alpha)) \leq 0$ (poichè $w^{-1}(\alpha) = \sum c_i \alpha_i$, $c_i \leq 0$, $\alpha_i \in \Pi$; e $(v_1, \alpha_i) \geq 0$ per ogni i). Dunque

$(v_2, \alpha) = 0$, e quindi $r_\alpha(v_2) = v_2$. Pertanto $v_2 = r_\alpha(v_2) = r_\alpha(w(v_1)) = w'(v_1)$, e per induzione su $l(w)$ si conclude che $v_1 = v_2$.

Osservazione :

Dal fatto che W opera regolarmente sulle camere di Weyl, si deduce altresì che, se $w \in W$ fissa un qualsiasi vettore $v \in E - \bigcup_{\alpha\in\Phi} H_\alpha$, allora $w = 1$.

Infatti, v apparterrà a una camera C, associata a un sistema fondamentale Π. Allora, per ogni $\alpha \in \Pi$, è $0 < (v, \alpha) = (w(v), w(\alpha)) = (v, w(\alpha))$, da cui $v \in w(C)$. Segue $C = w(C)$, donde $w = 1$.

(E ancora, di qui segue che le sole riflessioni appartenenti a W sono le riflessioni r_α $(\alpha \in \Phi)$. Infatti una riflessione r di asse H, diverso da H_α per ogni $\alpha \in \Phi$, fissa tutti i vettori in $H - \bigcup_{\alpha\in\Phi} H_\alpha$.)

7. Sistemi di radici irriducibili

Definizione 1. *Un sottoinsieme Φ di vettori non-nulli di uno spazio euclideo E si dice* **riducibile** *se è unione (necessariamente disgiunta, essendo (,) definita positiva) di due sottoinsiemi propri Φ_1 e Φ_2 mutuamente ortogonali, i.e. tali che $(\alpha, \beta) = 0$ per ogni $\alpha \in \Phi_1$, $\beta \in \Phi_2$. Φ si dice* **irriducibile** *in caso contrario.*

Proposizione 1. *Sia Φ un sistema di radici in uno spazio euclideo E, e sia Π un sistema fondamentale contenuto in Φ. Allora Φ è irriducibile se e solo se lo è Π.*

Dim. Supponiamo che Φ sia riducibile e che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$, sia una partizione ortogonale non-banale di Φ. Se Π non è contenuto né in Φ_1 né in Φ_2, otteniamo un'analoga partizione di Π. D'altra parte, se ad es. Π è contenuto in Φ_1, si ha $(\Pi,\Phi_2) = 0$, e quindi $(E,\Phi_2) = 0$, ciò che è impossibile poichè (,) è non-degenere.
Supponiamo ora che Φ sia irriducibile, e che $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$, $(\Pi_1, \Pi_2) = 0$, sia una partizione ortogonale di Π. Poichè (cfr. 4. , Teorema 4) ogni radice è immagine di una radice fondamentale mediante l'azione di W, si ha $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, ove Φ_i denota l'insieme di tutte le radici in Φ che sono immagini di radici in Π_i $(i = 1,2)$. Sia $\gamma = w(\alpha) \in \Phi_i$, con $\alpha \in \Pi_i$ e $w == r_1 \cdots r_k$, ove $r_j = r_{\alpha j}$, $\alpha_j \in \Pi$. Poichè $r_m r_j = r_j r_m$ se $(\alpha_j, \alpha_m) = 0$, si riconosce facilmente che γ si ottiene da α aggiungendo o sottraendo radici appartenenti a Π_i. Ne segue che Φ_i è contenuto nel sottospazio generato da Π_i, ciò che implica

$(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Dal momento che Φ è irriducibile, deve essere $\Phi_1 = \varnothing$, e quindi $\Pi_1 = \varnothing$, oppure $\Phi_2 = \varnothing$, e quindi $\Pi_2 = \varnothing$.

Proposizione 2. *Se Φ è un sistema di radici irriducibile, il gruppo di Weyl W è un sottogruppo irriducibile di $GL(E)$ (i.e. E non ammette alcun sottospazio W-invariante non-banale). In particolare: la W-orbita di una qualsiasi radice genera lo spazio E.*

Dim. Supponiamo che W sia riducibile, e sia U un sottospazio W-invariante non-banale di E. Essendo (,) definita positiva, è $U \cap U^\perp = \underline{0}$, e quindi (cfr. III. 3. Prop. 1) $E = U \oplus U^\perp$.
Sia ora $\alpha \in \Phi$. Poichè, per ogni $u \in U$, $(r_\alpha - 1)u = -<u, \alpha>\alpha \in U$, segue che o $\alpha \in U$, oppure $(u, \alpha) = 0$, ovvero $\alpha \in U^\perp$. Si ottiene dunque una partizione di Φ in due sottoinsiemi mutuamente ortogonali, uno dei quali per l'ipotesi deve essere necessariamente vuoto. Poichè Φ genera E, ciò implica che o $U = E$, oppure $U^\perp = E$, ovvero $U = \underline{0}$, contraddizione.
Dunque W è irriducibile, e in particolare, poichè il sottospazio S generato dalla W-orbita di una radice α è ovviamente invariante, $S = E$.

Proposizione 3. *Sia Φ un sistema di radici irriducibile. Le lunghezze delle radici sono allora al più due, e le radici aventi la stessa lunghezza formano un'orbita per l'azione di W.*

Dim. Siano α e β radici arbitrarie del sistema Φ. Poichè la W-orbita che contiene α genera E, in forza della Proposizione 2, esiste $w \in W$ tale che $(w(\alpha), \beta) \neq 0$. Pertanto, per ogni possibile lunghezza, possiamo supporre che vi sia in Φ una radice α di quella lunghezza, con α non ortogonale a β. Ma, se $(\alpha, \beta) \neq 0$, il rapporto fra i quadrati delle lunghezze di α e β può assumere solo i valori 1, 2, 1/2, 3, 1/3 (cfr. 3.). Se vi fossero in Φ radici di tre diverse lunghezze, anche il rapporto 3/2 dovrebbe essere ammesso, contraddizione.
Siano ora α e β radici della stessa lunghezza. Possiamo come sopra supporre (eventualmente rimpiazzando α con una opportuna $w(\alpha)$) che α e β non siano ortogonali. Possiamo inoltre supporre $\alpha \neq \pm\beta$, poichè in tal caso β sta nell'orbita di α (essendo $-\alpha = r_\alpha(\alpha)$). Segue allora, dalla Tabella in 3., che $<\beta, \alpha> = <\alpha, \beta> = \pm 1$. Rimpiazzando β, se è il caso, con $-\beta = r_\beta(\beta)$, possiamo supporre $<\beta, \alpha> = 1$. Si ha allora: $r_\alpha r_\beta r_\alpha(\beta) = r_\alpha r_\beta(\beta - \alpha) = r_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$, e dunque β sta nella W-orbita che contiene α. E' chiaro infine che ogni elemento di tale orbita è una radice della stessa lunghezza di α.

Definizione 2. *Se Φ è un sistema di radici irriducibile nel quale vi sono radici di lunghezza diversa, chiameremo* **radici lunghe** (long roots) *le radici aventi lunghezza maggiore,* **radici corte** (short roots) *le altre. (Nel caso in cui le radici di Φ abbiano tutte la stessa lunghezza, si conviene di chiamarle tutte "lunghe".)*